Problem des Monats

Fachschaft Mathematik

Dilthey

Problem des Monats Dezember (2018) /
Abgabetermin: 16.1.2019 (Mittwoch nach den Weihnachtsferien)

TEILBARKEIT DURCH UNGEWÖHNLICHE ZAHLEN

Vorbemerkung: Eine eventuelle Verwendung eines Taschenrechners oder Computers ist beim Problem des Monats Dezember nicht erlaubt

Man sagt, eine Zahl ist durch eine andere Zahl teilbar, wenn die Division ohne Rest „aufgeht“. Zum Beispiel ist 72 durch 9 teilbar, weil 72 : 9 = 8, Rest 0, ergibt.
In diesem Zusammenhang gibt es verschiedene Teilbarkeitsregeln, eine von ihnen kennt ihr bestimmt alle: Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0 lautet. Mithilfe dieser Regel kann man sofort sehen, dass z.B. die Zahl 913274029223210230 durch 10 teilbar ist.

<u>Für die Klassen 5 bis 7 (Teilbarkeit durch 11):</u>

Die Teilbarkeit einer Zahl durch 11 wird wie folgt untersucht:
Beispiel: 3528041
Die Zahl wird in zwei Summen gegliedert:
Summe 1: 1 + 0 + 2 + 3 = 6
Summe 1 besteht aus jeder zweiten Ziffer, von hinten beginnend.
Summe 2: 4 + 8 + 5 = 17
Summe 2 besteht aus den restlichen Ziffern.
Differenz der beiden Summen: 17 – 6 = 11
Ist die Differenz der Summen durch 11 teilbar[1], so ist auch die Ausgangszahl durch 11 teilbar.
Also ist 3528041 durch 11 teilbar.

a) Prüfe nach diesem Verfahren, ob die fünf Zahlen 4982219; 582304445; 2879; 8337999879; 90518281729161 durch 11 teilbar sind.

b) Die zwanzigstellige Zahl 297915829_6172037826 ist durch 11 teilbar.
Finde mit Hilfe dieses Verfahrens heraus, welche Ziffer in der Lücke stehen muss!

---

[1] 0 ist übrigens auch durch 11 teilbar.

Für die Klassen 8 und 9 (Teilbarkeit durch 7, 11 und 13):

Das Produkt der Zahlen 7, 11 und 13 ist 1001.
Multipliziert man eine dreistellige Zahl abc mit 1001, so erhält man eine Zahl mit der Ziffernfolge abcabc. Jede Zahl dieser Form ist durch 7, 11 und 13 teilbar. Dies gilt insbesondere für die Zahl 999999 = 1000000 – 1.

Die Teilbarkeit einer Zahl durch 7, 11 und 13 wird wie folgt untersucht:
Beispiel: 42623295
Die Zahl wird in Gruppen zu je drei Ziffern, hinten beginnend, zerlegt.
Die letzte Gruppe kann weniger als drei Ziffern umfassen.
42623295 = 295 + 623 · 1000 + 42 · 1000000 = 295 + 623 · (1001 – 1) + 42 · (999999 + 1)
= (Distributivgesetz) 295 + 623 · 1001 – 623 + 42 · 999999 + 42.
Da 1001 und 999999 durch 7, 11 und 13 teilbar sind, ist 42623295 genau dann durch 7, 11 oder 13 teilbar, wenn 295 – 623 + 42 ebenfalls durch 7, 11 oder 13 teilbar ist.
Nun ergibt 295 – 623 + 42 = – 286. Diese Zahl ist durch 11 und 13, aber nicht durch 7 teilbar.
Folglich ist die Ausgangszahl 42623295 durch 11 und 13, aber nicht durch 7 teilbar.

a) Prüfe nach diesem Verfahren, ob diese fünf Zahlen durch 7, 11 oder 13 teilbar sind: 8922004; 969353; 56930874; 3976861; 735197903

b) Betrachte die neunstellige Zahl 1984_7283!
Finde mit Hilfe dieses Verfahrens heraus, welche Ziffer in der Lücke stehen muss, damit diese Zahl durch 7 bzw. damit diese Zahl durch 11 teilbar ist.
Zeige auch mit Hilfe dieses Verfahrens, dass die Lücke nicht so gefüllt werden kann, dass die Zahl durch 13 teilbar ist.

Für die Klassen E bis Q3:

Michael findet in einem Mathematikbuch die Angabe 23! = 2585201673_8849_664*******. [2]
Darin befinden sich auch die zwei durch _ angedeuteten unleserlichen Ziffern.
Außerdem zeigen die sieben Sternchen am Ende der Zahl an, dass nach der Ziffer 4 nur noch Nullen stehen. Ob die Anzahl der Nullen aber sieben, weniger als sieben oder mehr als sieben ist, ist unbekannt.
Michael möchte a) die Anzahl der Nullen, b) die beiden unleserlichen Ziffern inmitten der Zahl ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen oder 23! konkret auszurechnen.
Führe eine solche Ermittlung durch und begründe die einzelnen Schritte.
Dabei wird vorausgesetzt, dass die angegebenen Ziffern korrekt sind.
(Tipp: Schau dir die Aufgabe für die Klassen 5 bis 7 an!)

[2] Für jede natürliche Zahl n wird n! definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n; so gilt z.B. 4! = 1 · 2 · 3 · 4 = 24.