



Problem des
Monats
Fachschaft
Mathematik



Problem des Monats DEZEMBER (2012)

Abgabe bis spätestens 16. Januar

Eratosthenes, Goldbach und Farrell

Zu den großen altgriechischen Gelehrten zählt Eratosthenes von Kyrene (um 280-um 200 v.Chr.), der Leiter der berühmten Bibliothek von Alexandria. Als Mathematiker erfand er ein Verfahren zur Berechnung von Primzahlen, das „Sieb des Eratosthenes“.

Primzahlen sind natürliche Zahlen, die nur durch sich selbst und 1 (ohne Rest) teilbar sind. Die Zahl 1 erfüllt zwar diese Bedingung, gehört jedoch nicht zur Menge der Primzahlen.

„Sieb des Eratosthenes“: Man schreibt die natürlichen Zahlen von 2 angefangen bis zu einer höchsten hin und streicht alle geraden Zahlen ab 4, dann alle durch 3 teilbaren Zahlen ab 9 usw. Übrig bleiben alle weiteren Primzahlen.

Für die Klassen 5 und 6:

Finde auf diese Weise alle Primzahlen bis einschließlich 101. Das Vorgehen muss dokumentiert sein. (Es genügt nicht, ausschließlich die Primzahlen aufzulisten.)

Die „Goldbachsche Vermutung“: Jede gerade (natürliche) Zahl $\neq 2$ lässt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen, meist gelingt die Zerlegung auf mehrfache Art. Zerlege in der beschriebenen Weise die Zahlen 4, 22 und 48.

Diese Vermutung wurde von dem deutschen Mathematiker Ch. Goldbach (1690-1764) im Jahre 1742 erstmals geäußert.

Für die Klassen 5-8:

Finde eine mögliche Zerlegung in der beschriebenen Weise für die Zahlen 4, 22 und 48.

Für die Klassen 9-E:

Zerlege in der beschriebenen Weise die Zahlen 4, 22 und 48. Finde alle möglichen Zerlegungen.

Jede Primzahl p lässt sich in der Form $p = 4n \pm 1$ ($n=0,1,2,..$) aufschreiben. (Die Umkehrung des Satzes gilt nicht.)

Für die Klassen 7-E:

Suche aus den Primzahlen (≤ 101) vier aus, für welche gilt $p_1 = 4 \cdot n_1 + 1$, $p_2 = 4 \cdot n_2 - 1$, $p_3 = 4 \cdot n_3 - 1$, $p_4 = 4 \cdot n_3 + 1$ (n_1, n_2 und n_3 sind jeweils Platzhalter für die gesuchten Primzahlen.)

Das Wort „Mirp“ entsteht, wenn man „Prim“ von rechts nach links liest. Daraus hat der Amerikaner Jeremiah P. Farrell den Begriff „Mirpzahl“ gebildet:

Eine Mirpzahl ist eine Primzahl, die eine ebensolche ergibt, wenn man ihre Ziffern in umgekehrter Folge niederschreibt. (Bsp.: 13 (31))

Außerdem versteht man unter einer palindromischen Zahl eine solche, die von rechts nach links gelesen die gleiche Zahl ergibt. (Bsp.: 18581)

Für die Klassen 5-13:

Welche der Primzahlen ≤ 101 sind palindromische Primzahlen?

Welche der Primzahlen ≤ 101 sind Mirpzahlen?

Für die Klassen E-13:

Wie stehen allgemein palindromische Primzahlen und Mirpzahlen zueinander?

Es gibt nur 3 Summen jeweils verschiedener Mirpzahlen ≤ 101 , die wieder eine Mirpzahl ≤ 101 ergeben. Bilde diese Summen.

Schreibt man 2 verschiedene (2-stellige) Mirpzahlen ≤ 101 untereinander, so kann ein magisches Mirpzahlenquadrat entstehen (s. Beispiel a)). Bei 12 Lesarten (von links nach rechts und umgekehrt, von oben nach unten und umgekehrt, sowie 4-mal diagonal) sind in dem Quadrat 12 Mirpzahlen enthalten. (Achtung: Beispiel b) stellt kein magisches Mirpzahlenquadrat dar, weil 33 keine Prim- bzw. Mirpzahl ist.)

Bilde alle möglichen, verschiedenen Mirpzahlenquadrate aus den Mirpzahlen ≤ 101 . Als verschieden gelten 2 Quadrate, die sich nicht durch Vertauschung irgend zweier Ziffern ineinander überführen lassen.

Zwei von Ihnen gehen durch eine gewisse Spiegelung in sich selbst über. Welche sind dies, und um welche Spiegelung handelt es sich hierbei?

Beispiel a)

1	3
7	1

Beispiel b)

3	1
7	3