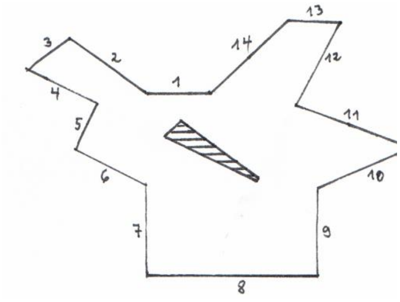

Problem des Monats

Fachschaft Mathematik

Dilthey

Problem des Monats OKTOBER (2014) / Abgabetermin: 17.11.2014

Liebe Schülerinnen und Schüler der Diltheyschule,
das Problem des Monats (PdM) geht in die nächste Runde.

Wir gratulieren den drei Siegern aus dem letzten Jahr:
Mara Heidelbach, Isabel Kurth und Susanne Ridder, alle drei aus der 7c.
Ebenfalls sehr gut abgeschnitten haben Balthasar Lammel und Katrin Ridder aus der 5a, Yannic Laifer aus der 5b, Elizabeth George, Fabio Giampapa, Leonie Golla und Lara Oeltjebruns aus der 6c, Louisa Martin und Flora Suchy aus der 6d, Benjamin Fluck, Annika Noll und Annika Simon aus der 7c.

Die von euch in diesem Schuljahr gelösten Probleme sollen mit Name und Klasse versehen in den PdM-Briefkasten im Gang zur Chemie eingeworfen werden.
Letzte Leerung des Briefkastens für das Oktoberproblem ist am Montag, 17. November.
Viel Spaß!

Hier ist nun das **Problem für den Monat Oktober**: Es geht um **magische Quadrate**.
Im Jahre 1514, also vor genau 500 Jahren, entstand auf dem Kupferstich *Melancolia* des Malers, Grafikers und Mathematikers Albrecht Dürer ein magisches Quadrat der **Ordnung 4**:

In unserer vertrauten Schreibweise sieht das dann so aus:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Das Quadrat ist so aufgebaut, dass das Entstehungsjahr 1514 in der Mitte der unteren Zeile erscheint. Es ist magisch, weil erstens die Summe der vier Zahlen in jeder der vier Zeilen, in jeder der vier Spalten und in beiden Diagonalen gleich ist (hier gleich 34) und weil zweitens alle natürlichen Zahlen, von 1 beginnend, bis 16 in dem Quadrat auftauchen. Die Summe 34 wird hierbei als magische Summe bezeichnet.
Dagegen nennen wir ein Quadrat, das nur die erste Eigenschaft besitzt, halb-magisch. So ist z.B. dieses Quadrat der Ordnung 3 (3 Zahlen pro Zeile, 3 Zahlen pro Spalte) halb-magisch, weil die Summe in jeder der vier Zeilen, in jeder der vier Spalten und in beiden Diagonalen gleich ist (magische Summe ist 39), allerdings nicht die Zahlen von 1 bis 9 in ihm vorkommen.

18	5	6
1	13	25
20	11	8

Bitte wenden!

Mit dem im Folgenden beschriebenen Verfahren kann man magische Quadrate ungerader Ordnung (also der Ordnungen 3, 5, 7, …) herstellen. Das wird am Beispiel eines magischen Quadrates der Ordnung 3 gezeigt:

	1	

Zeichne das Quadrat und schreibe die 1 in die Mitte der oberen Zeile hinein. Gehe dann immer ein Feld diagonal nach rechts oben weiter und trage fortlaufend die Zahlen 2, 3, 4, … ein.

		2
	1	
		2

Stößt man dabei auf ein Problem, umgeht man es folgendermaßen:

- Du bist in der oberen Zeile (Beispiel: von der Zahl 1 zur Zahl 2). Dann geht man zum Feld der untersten Zeile, das man erreichen würde, wenn die unterste Zeile direkt über der obersten läge.
- Du bist in der rechten Spalte (Beispiel: von der Zahl 2 zur Zahl 3). Dann geht man in das Feld der Spalte ganz links, das man erreichen würde, wenn diese rechts neben der rechten Spalte läge.

	1		
3			3
		2	

- Du stößt auf ein bereits belegtes Feld (Beispiel: von der Zahl 3 zur Zahl 4) oder befindest dich ganz oben rechts (Beispiel: von der Zahl 6 zur Zahl 7). Dann geht man statt der Bewegung nach rechts oben einfach nach unten.

Auf diese Weise erhält man z.B. dieses magische Quadrat der Ordnung 3:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

<u>Für die Klassen 5 bis 7:</u>

I. Zeichne mit dem beschriebenen Verfahren die magischen Quadrate der Ordnung 5, 7 und 9!

II. Wie heißen jeweils die magischen Zahlen der Quadrate der Ordnung 5, 7 und 9?

III. Wie hängt die magische Zahl mit der Zahl zusammen, die genau in der Mitte des magischen Quadrates liegt? Schreibe deine Vermutung auf!

<u>Für die Klassen 8 und 9:</u>

I. Bearbeite die Probleme I. und II. der Klassenstufe 5 bis 7 für Quadrate der Ordnung 9!

Das abgebildete Quadrat der Ordnung 4 liefert für beliebige Zahlen a und b aus der Menge der natürlichen Zahlen halb-magische Quadrate.

a+b	a	12a	7a
11a	8a	b	2a
5a	10a	3a	3a+b
4a	2a+b	6a	9a

II. Welche Zahlen müssen für a und b gewählt werden, damit sogar ein magisches Quadrat entsteht?

III. Zeige, dass bei beliebiger Wahl von a und b stets ein halb-magisches Quadrat entsteht!

IV. Welche Zahlen können für a und b gewählt werden, damit ein halb-magisches Quadrat mit der magischen Summe 2014 entsteht? Formuliere deinen Lösungsweg zur Bestimmung von a und b und zeichne ein halb-magische Quadrat abschließend auf!

<u>Für die Klassen 10 bis 12:</u>

I. Stelle eine Formel für die magische Summe eines magischen Quadrats der Ordnung n auf und begründe die Formel! (Tipp: Hilfreich ist hierfür das Problem III., Klasse 5-7)

II. Betrachte das Problem IV. für die Klassen 8 und 9! Bestimme, wie viele verschiedene Paare (a,b) (aus der Menge der natürlichen Zahlen) es gibt, die zu einem halb-magischen Quadrat mit der magischen Summe 2014 führen! Erkläre dein Vorgehen!

III. Man kann auch aus dem Quadrat von Albrecht Dürer zu einem halb-magischen Quadrat mit der magischen Summe 2014 kommen. Dazu wird jeder Quadrateintrag mit der natürlichen Zahl m multipliziert und anschließend wird dazu die natürliche Zahl n addiert. So gelangt man z.B. vom magischen Dürer-Quadrat für m = 2 und n = 5 zu dem abgebildeten halb-magischen Quadrat. Welches Zahlenpaar (m,n) muss gewählt werden, damit ein halb-magisches Quadrat mit der magischen Summe 2014 entsteht, bei dem oben rechts die Zahl 625 steht? Formuliere deinen Lösungsweg und zeichne das halb-magische Quadrat abschließend auf!

37	11	9	31
15	25	27	21
23	17	19	29
13	35	33	7